Résolution numérique d'une équation

Partie I

Soit $a < b$ deux réels et $g:[a,b] \to [a,b]$ une application.

1. On suppose dans cette question que g est continue.
   Montrer que l'équation $x = g(x)$ possède au moins une solution dans $[a,b]$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe une constante $K \in [0,1[$ telle que pour tout couple (x,y) d'éléments de $[a,b]$ on ait :
$$\left|g(x) - g(y)\right| \leq K|x-y|.$$

2.a Montrer que l'équation $x = g(x)$ possède une solution unique $\xi \in [a,b]$.

2.b Soit $u \in [a,b]$, on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = u$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geq 0$.
Montrer que la suite (x_n) converge vers ξ.

2.c Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$,
$$\left|x_{n+p} - x_n\right| \leq \frac{1-K^p}{1-K}\left|x_{n+1} - x_n\right|.$$

2.d Etablir : $\forall n \geq 1$,
$$\left|x_n - \xi\right| \leq \frac{K^n}{1-K}\left|x_1 - x_0\right|.$$

3. On suppose maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\forall x \in [a,b], \left|g'(x)\right| < 1$.

3.a Justifier que g vérifie l'hypothèse de la question 2.

3.b La suite (x_n) étant définie comme ci-dessus, prouver que si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq \xi$ alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\xi - x_{n+1}}{\xi - x_n} = g'(\xi)$.

Partie II

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle ouvert I.

On suppose qu'il existe un point $\xi \in I$ tel que $f(\xi) = 0$ et qu'en outre que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

On considère l'application g définie sur I par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Montrer que $g(\xi) = \xi$ et $g'(\xi) = 0$.

2.a Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, en posant $J = [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$, on ait $\forall x \in J, \left|g'(x)\right| < 1$.

2.b Justifier que $g(J) \subset J$.

3. Soit $u \in J$, on considère la suite (x_n) définie par $x_0 = u$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geq 0$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq \xi$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\xi - x_{n+1}}{\xi - x_n} = 0$.